



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA
FACULTE DES MATHEMATIQUES ET
DE L'INFORMATIQUE



DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE

MEMOIRE de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle

Par

Douffi Zoulikha

Sujet

**Espaces Lipschitz libres et extension des
applications Lipschitziennes**

Devant le jury :

Mezrag Lahcène

Prof. Univ de M'sila

Président

Tallab Abdelhamid

M.C.B. Univ de M'sila

Rapporteur

Elhadj Dahia

M.C.A. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2017 / 2018

Table des matières

Introduction	1
Notations	2
1 Espaces métriques et opérateurs Lipschitziens	3
1.1 Espaces métriques	3
1.1.1 Définitions et propriétés	3
1.1.2 Propriété d'intersection binaire	6
1.2 Les applications Lipschitziennes	6
1.2.1 Définition et propriétés	6
1.2.2 L'espace $Lip(X)$	8
1.2.3 L'espace $Lip_0(X)$	8
1.3 Les applications bilinéaires	9
2 Espaces Lipschitz libres et extension des applications Lipschitziennes	10
2.1 Espace Lipschitz libre	10
2.1.1 Définition des espaces Lipschitz-libres	10
2.1.2 L'espace Lipschitz libre et linéarisation globale des applications Lipschitziennes	11
2.2 La rétraction Lipschitzienne et la structure des espaces Lipschitz libres . . .	15
2.2.1 Introduction	15
2.2.2 La rétraction Lipschitzienne dans les espaces de Banach	15
2.2.3 $\mathcal{L}_p$ -espace	22

3	Les applications 2-Lipschitziennes sur les espaces Lipschitz libres	24
3.1	Les applications 2-Lipschitziennes	24
3.2	L'extension linéaire simultanée	26
	Bibliographie	30

Introduction

Le concept d'un espace de Banach libre (Lipschitz libre), sur l'espace métrique X telle que l'application Lipschitz de X dans l'espace normé E peut être étendue à un opérateur linéaire continue.

Par la suite, la notion d'espace de Banach libre est une preuve qui remonte à Flood en 1975, Pestov en 1986 et Weaver en 1999. Nous allons présenter d'abord la construction de Arens et Eels de l'espace pour qui $Lip_0(X)$ est l'espace dual. On remarque qui est moins explicite que réalisation de $Lip_0(X)$ comme un espace dual est donné par de Leew [15] (voir aussi [24, p. 38]). Il a été montré par Arens et Eels (voir [24, p.38]) que $Lip_0(X)$ est un espace dual du même espace de Banach, i.e., il existe un espace de Banach Z telle que $Lip_0(X)$ est isométriquement isomorphes à Z^* . Il est généralement appelé aujourd'hui, suivant [9], l'espace Lipschitz libre sur X est le note par $\mathcal{F}(X)$. Pour que $Lip_0(X)$ est isométrique isomorphe à $\mathcal{F}(X)$ (voir [14]).

Dans ce mémoire, nous avons détaillé et étudié l'article de M. Dubei et al [5] sur l'espace de Banach libre et l'extension des applications Lipschitziennes, dans ce travail on adopte l'appelation (espace Lipschitz Libre) de Godefroy et Kalton en 2003 dans [9],

Ce mémoire est divisé en trois chapitres qui sont les suivants :

Dans le premier chapitre, on donnera quelque préliminaires sur les espaces métriques et les applications Lipschitzienne et Les applications bilinéaires.

Dans le deuxième chapitre, on présentera l'espace Lipschitz libre et leurs propriétés. Ensuite, on étudiera la rétraction Lipschitzienne et la structure des espaces Lipschitz libres.

Le troisième chapitre est consacré pour les applications 2-Lipschitzienne et l'extension linéaire simultanée.

Notations

$\mathbb{k}$	:	Corps des scalaires ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers relatifs.
e	:	Elément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé.
M_0	:	Ensemble des espaces métriques complets pointés.
$\text{Lip}(X, Y)$	:	Espace de toutes les applications Lipschitziennes de X dans Y .
$\text{Lip}_0(X, Y)$	:	Espace des applications Lipschitziennes de X dans Y nulles au point e .
$\text{Lip}_0^2(X, Y)$	:	Espace des applications 2-Lipschitziennes de X dans Y nulles au point e .
$X^\#$	:	Espace des formes Lipschitziennes sur X .
X^*	:	Espace dual de X .
$\text{Bil}(E, F)$	:	Espace de Banach des applications bilinéaires bornés.
$\mathcal{L}(X, Y)$	:	Espace des applications linéaires continues.
$\mathcal{F}(X)$	:	Espace de Lipschitz libre
l_∞	:	Espace des suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n < \infty$.
$X \otimes Y$	:	Produit tensoriel entre deux espaces de Banach.
$X \otimes_\pi Y$	:	Produit tensoriel projectif entre deux espaces de Banach.
$\widehat{X \otimes Y}$	:	le complété du produit tensoriel
$l_\infty(\mathbb{R})$	:	Espace des fonctions bornées dans $\mathbb{R}$.
l_p	:	Espace des suites $(x_n)_n$ telle que $\ x_n\ = (\sum_{n=0}^\infty x_n ^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$
$\ker F$	:	Le noyau de l'opérateur F .
B_X	:	Boule unité fermée de l'espace X .

Chapitre 1

Espaces métriques et opérateurs Lipschitziens

1.1 Espaces métriques

La notion d'espace métrique a été formalisé par Maurice Fréchet dans sa thèse de doctorat d'était en 1906 "Sur quelques points du calcul fonctionnel" a Palerme. Pour tout ce qui concerne ce chapitre. On pourra consulter l'excellent livre de Weaver[24].

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1 *Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble non vide et d est une distance sur X .*

Soit (X, d_X, e) Un espace métrique pointé (i.e., e un élément neutre ou distingué). On note par

$$M_0 = \{\text{espaces métriques complets pointés}\}.$$

Définition 1.1.2 *Un espace métrique (X, d) est dit discret s'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad d(x_1, x_2) \geq \delta.$$

Un espace métrique discret est dit localement fini si pour toute $a \in X$ et $r > 0$, l'ensemble $\{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ est fini.

Par exemple $\mathbb{N}$ muni de la distance $d(n, m) = |m - n|$ est localement fini.

Définition 1.1.3 *Un espace métrique (X, d) est dit métriquement convexe si pour tout $x_1, x_2 \in X$ et $0 < t < 1$, il existe $x_t \in X$ tel que*

$$d(x_0, x_1) = td(x_1, x_2)$$

et

$$d(x_t, x_1) = (1 - t)d(x_1, x_2).$$

Définition 1.1.4 *Un sous ensemble A d'un espace métrique (X, d) est borné si, et seulement si, il est contenu dans une boule. i.e.,*

$$\exists a \in X, \exists r > 0 \text{ tel que } A \subset B_f(a, r).$$

Propriétés des espaces métriques

Définition 1.1.5 *Soient (X, d) un espace métrique et $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite dans X .*

La suite u est convergente vers $l \in X$ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, l) < \varepsilon.$$

La suite u est de Cauchy si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.6 *Un espace métrique est complet si, et seulement si, toute suite de Cauchy est convergente.*

Définition 1.1.7 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) . L'application f est continue en $a \in X$ si, et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, d(x, a) < \alpha \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

L'application f est continue sur X si, et seulement si, elle est continue en tout point a de X .

L'application f est uniformément continue si, et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \alpha \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Proposition 1.1.1 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces métriques (X, d) et (Y, d) . L'application f est continue en $a \in X$, si, et seulement si, pour toute suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ de X converge vers a , la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Proposition 1.1.2 Si f est uniformément continue sur X , alors f est continue sur X , mais ils existent des applications continues qui ne sont pas uniformément continues.

Exemple 1.1.1 La fonction $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ défini par $f(x) = x^2 \cdot f$ est évidemment continue. On prend $\epsilon = 1$ et $\eta > 0$, nous

choisissons $x = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{\eta}$ et $y = \frac{1}{\eta}$.

$$|x - y| = \left| \frac{\eta}{2} + \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta} \right| = \left| \frac{\eta}{2} \right| < \eta.$$

Mais

$$|f(x) - f(y)| = \left| \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{\eta} \right)^2 - \left(\frac{1}{\eta} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\eta}{4} > 1.$$

Donc f n'est pas uniformément continu.

Définition 1.1.8 (Isométrie et plongement) On dit que deux espaces métriques (X, d) et (Y, d) sont isométriques, s'il existe une application bijective $f : X \rightarrow Y$ qui préserve les distances, c'est-à-dire que, pour tout $a, b \in X$,

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

Définition 1.1.9 (Produit d'espaces métriques) Soit $\{(X_i, d_i, e_i); i \in I\}$ une famille d'espaces métriques dans M_0 , on définit par $(\Pi^\infty X_i, d, e)$ l'ensemble des $x = (x_i)_{i \in I}$ tel que $\sup_{i \in I} d_{x_i}(x_i, e_i) < \infty$ avec la métrique

$$d(x, y) = \sup_{i \in I} d_{x_i}(x_i, y_i)$$

et l'élément distingué $e = (e_i)_{i \in I}$.

Nous avons $(\Pi^\infty X_i, d, e) \in M_0$.

1.1.2 Propriété d'intersection binaire

Définition 1.1.10 Un espace métrique X possède la propriété d'intersection binaire si toutes les collections des boules fermés ont une intersection non vide est la distance entre les centres des deux boules dépasse la somme de leurs rayons. En d'autres termes, pour chaque famille de points $x_\alpha \in X$ et nombre $r_\alpha > 0$ tels que $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ pour tous α, β il existe $x \in X$ tels que $d(x_\alpha, x) \leq r_\alpha$ pour tous α .

Exemple 1.1.2 Soit $f_n \in C[0, 1]$ une fonction tels que $f_n(x) = -1$ pour $x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 1$ pour $x \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, et f_n est linéaire. Depuis $\|f_n - f_m\| \leq 1$ pour tous n, m , nous pouvons choisir $r_n \leq \frac{1}{2}$ pour tous n . Mais si une fonction f est telle que $\|f - f_n\| \leq \frac{1}{2}$ pour tous n , alors $f(x) \leq \frac{-1}{2}$ pour $x < \frac{1}{2}$ et $f(x) \geq \frac{1}{2}$ pour $x > \frac{1}{2}$.

1.2 Les applications Lipschitziennes

Le morphisme naturel entre les espaces métriques sont les fonctions Lipschitziennes comme les opérateurs linéaires entre les espaces de Banach. Dans l'analyse mathématique, la continuité de Lipschitz, appelée d'après Rodolf Lipschitz, est une forme forte de continuité uniforme pour des fonctions.

1.2.1 Définition et propriétés

On commence par quelques définitions et propriétés élémentaires concernant les applications Lipschitziennes.

Définition 1.2.1 Une application $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est dite Lipschitzienne, s'il existe $k > 0$ telle que

$$\forall x, y \in X, d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$$

si $k = 1$, est dite non expansive,

si $k < 1$, est dite contraction.

On notera par $Lip_k(X, Y)$ l'ensemble des applications Lipschitziennes de rapport k de X dans Y , et $Lip(X, Y)$ la réunion de ces ensembles.

Définition 1.2.2 Pour une fonction Lipschitzienne f , on définit la constante de Lipschitz par

$$\begin{aligned} \|f\|_{\text{Lip}} &= \text{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}. \\ &= \inf \{k, k \text{ de la définition}\}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.3 Soit (X, e_X, d_X) et (Y, e_Y, d_Y) deux espaces métriques pointés. On dit que $f : X \rightarrow Y$ préserve l'élément distingué si $f(e_X) = e_Y$.

Définition 1.2.4 (Lipschitz Equivalence) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une application. S'ils existent $h, k \in \mathbb{R}$ tels que:

$$\forall x, y \in X : h d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y) \leq k d_Y(f(x), f(y)).$$

alors f est une Lipschitz equivalence, et (X, d_X) et (Y, d_Y) sont décrits comme Lipschitz equivalent. préserve l'élément distingué si $f(e_X) = e_Y$.

Définition 1.2.5 Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est un isomorphisme Lipschitzien si f est bijective et f et f^{-1} Lipschitziennes. Elle est un isomorphisme isométrique si

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Définition 1.2.6 Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques. On appelle plongement Lipschitzien de X dans Y s'ils existent $c_1, c_2 > 0$, $\forall x, y \in X$, on a

$$\frac{1}{c_2} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq c_1 d_X(x, y).$$

Remarque 1.2.1 On dit que f est un plongement isométrique si $c_1 = c_2 = 1$.

Proposition 1.2.1 Toute espace métrique (X, d) est isométrique à un sous ensemble de $l_\infty(I)$. Si X est séparable, alors il est isométrique à un sous ensemble de $l_\infty(\mathbb{N})$.

Remarque 1.2.2 Toute application Lipschitzienne est uniformément continue, mais la réciproque est fausse. Par exemple la fonction. $x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$ est uniformément continue, mais elle n'est pas Lipschitzienne.

Théorème 1.2.1 [24] Soient X_0, Y_0 deux espaces métriques et X, Y leurs completions (i.e., $\overline{X_0} = X, \overline{Y_0} = Y$). Soit $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ une fonction Lipschitzienne, alors il existe une unique extension $f : X \rightarrow Y$ telle que $Lip(f) \leq Lip(f_0)$.

Théorème 1.2.2 [2, p.261] Soit E un espace de Banach séparable, alors pour chaque espace de Banach séparable F il existe une application Lipschitzienne surjective φ de E sur F .

1.2.2 L'espace $Lip(X)$

Définition 1.2.7 Soit X un espace métrique et Y est un Banach. On note par $Lip(X, Y)$ l'espace de toutes les fonctions Lipschitziennes de X dans Y .

$$Lip(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ fonctions Lipschitziennes}\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{Lip(X, Y)} = \max \{\|f\|_\infty, Lip(f)\}. \quad (1.2.1)$$

Si $Y = \mathbb{R}$, alors $Lip(X, Y) = Lip(X)$. qui est u espace de Banach muni de la norme 1.2.1

1.2.3 L'espace $Lip_0(X)$

Définition 1.2.8 Soit X un espace métrique pointé. On appelle dual de Lipschitz et on le note par $X^\#$ "l'espace de Banach des formes Lipschitziennes sur X ". i.e.,

$$X^\# = Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lipschitzienne tel que } f(e) = 0\}.$$

Corollaire 1.2.1 *Toute fonction $f_0 \in \text{Lip}_0(X_0)$ d'un sous ensemble X_0 de l'ensemble normé X s'étend une fonction $f \in \text{Lip}_0(X)$ sur le même constant Lipschitzienne. Les résultats de ce type ont été découverts de façon indé.*

1.3 Les applications bilinéaires

Définition 1.3.1 *Soient X, Y, Z trois espaces de Banach. Une application $T : X \times Y \rightarrow Z$ est dit bilinéaire, si les applications*

$$\begin{aligned} T_x : Y &\rightarrow Z & \text{et} & & T_y : X &\rightarrow Z \\ y &\rightarrow T(x, y) & & & x &\rightarrow T(x, y) \end{aligned}$$

sont linéaires pour tout $x \in X, y \in Y$.

On dit que T est continue si, et seulement si, $\exists c > 0 : \|T(x, y)\| \leq c \|x\| \|y\|$. Dans ce cas, on pose

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf \{c : c \text{ vérifiait la précédente inégalité} \} \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \|T(x, y)\| \end{aligned}$$

On note par $\text{Bil}(X, Y, Z)$ l'espace de Banach des applications bilinéaires continues.

Exemple 1.3.1 1. *L'application convolution*

$$\begin{aligned} T : L_1(\mathbb{R}) \times L_1(\mathbb{R}) &\rightarrow L_1(\mathbb{R}) \\ (f, g) &\rightarrow T(f, g) = f * g \end{aligned}$$

T est bilinéaire

2. *Soit K un espace compact et soit X un espace de Banach. Alors*

$$\begin{aligned} T : C(K) \times X &\rightarrow C(K, X) \\ (f, x) &\rightarrow T(f, x) = f(\cdot) \cdot x \end{aligned}$$

Chapitre 2

Espaces Lipschitz libres et extension des applications Lipschitziennes

2.1 Espace Lipschitz libre

2.1.1 Définition des espaces Lipschitz-libres

Définition 2.1.1 Soient (X, d) un espace métrique pointé, l'espace de Lipschitz libre noté par $\mathcal{F}(X)$ est un sous espace de $\text{Lip}_0(X)^*$, défini par

$$\overline{(\text{span} \{ \delta_X(x) \}_{x \in X})}^{\text{Lip}_0(X)^*} = \mathcal{F}(X),$$

avec l'application $\delta_x : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ est une injection isométrique définie par $\delta_X(x)(f) = \langle \delta_X(x), f \rangle = f(x), x \in X$.

Proposition 2.1.1 Le dual de $\mathcal{F}(X)$ est linéairement isométrique à l'espace $\text{Lip}_0(X)$.

Proposition 2.1.2 Soient X et Y deux espaces métriques pointés et $T : X \rightarrow Y$ une application Lipschitzienne vérifiant $T(0) = 0$. Alors il existe une unique application linéaire $\hat{T} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ vérifiant $\text{Lip}(T) = \|\hat{T}\|$ et $\delta_Y \circ T = \hat{T} \circ \delta_X$. Autrement dit, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_Y \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\hat{T}} & \mathcal{F}(Y). \end{array}$$

De plus on a $\|\widehat{T}\| = \text{Lip}(T)$.

Théorème 2.1.1 (Godefroy, Kalton) *Soient E, F deux espaces de Banach tels que E séparable et qu'il existe une isométrie (non linéaire) de E dans F . Alors E est linéairement isométrique à un sous espace de F .*

2.1.2 L'espace Lipschitz libre et linéarisation globale des applications Lipschitziennes

Définition 2.1.2 *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) . Le module de continuité de f est la fonction*

$$w_f(t) = \sup \{d_Y(f(x), f(y)) : x, y \in X \text{ et } d_X(x, y) \leq t\}.$$

On dit que f est uniformément continue si $\lim_{t \rightarrow 0^+} w_f(t) = 0$. Si pour une constante c $w_f(t) \leq ct$, pour chaque $t > 0$, on appelle f est Lipschitzienne.

Définition 2.1.3 *Un espace normé (X, d, α) est un espace métrique (X, d) sur les valeurs réelle non négative de la fonction α telle que*

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq d(x, y) \leq \alpha(x) + \alpha(y) \text{ pour tous } x, y \in X.$$

Nous appelons α une norme sur X . Il est clair que l'espace métrique X est un ensemble normé

$$\alpha(x) = d(e, x),$$

où e est un point distingué dans X .

Proposition 2.1.3 *Soit E est un espace normé. Pour toute $F \in \text{Lip}_0(X, E)$ on a*

$$\|F(x)\| \leq L_F \alpha(x),$$

où L_F est une constante Lipschitzienne de F et en plus $\text{Lip}_0(X, E)$ est un espace normé avec la norme

$$\|F\| = L_F.$$

Théorème 2.1.2 *Soit $X = (X, d, \alpha)$ un espace normé. Il existe un unique isométrie isomorphisme, l'espace de Banach $\mathcal{F}(X)$ sur le corps $\mathbb{k}$ et un isométrie injectif $v : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ telle que*

1. *Les vecteurs $v(x)$, $x \in X$ avec $\alpha(x) > 0$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{F}(X)$ et $\text{span}(v(X))$, le span linéaire de $v(x)$, $x \in X$ est dense dans $\mathcal{F}(X)$.*
2. *Chaque $F \in \text{Lip}_0(X, E)$ peut être étendu à l'opérateur linéaire continu $\tilde{F} : \mathcal{F}(X) \rightarrow E$ tel que $\|F\| = L_F$ pour un espace normé E .*
3. *Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, alors pour chaque sous ensemble fermé $X_0 \subset X$ avec le point distingué $e \in X_0$ l'inclusion $X_0 \rightarrow X$ s'étend à un isométrie des espaces de Banach $\mathcal{F}(X_0) \rightarrow \mathcal{F}(X)$.*
4. *Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, alors pour chaque sous ensemble fermé $X_0 \subset X$ le point distingué $e \in X_0$ l'inclusion $X_0 \rightarrow X$ s'étend au isométrie injectif $\mathcal{F}(X_0) \rightarrow \mathcal{F}(X)$.*

Le première et deuxième affirmation ont été prouvées dans [7], [8, p. 23], Pestov dans [20] et Weaver dans [24, p. 41]. La troisième affirmation a été prouvée par Pestov dans [21] et par Weaver dans [24, p. 42].

Corollaire 2.1.1 *Tout espace normé X peut être isométriquement injectif à $\mathcal{F}(X)^{**}$ (le bidual de $\mathcal{F}(X)$) tels que le sous espace engendré par son image est faiblement dense dans $\mathcal{F}(X)^{**}$ et l'espace $\text{Lip}_0(X)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{F}(X)^*$.*

Preuve. Soit $I : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)^{**}$ est l'isométrie injective canonique. Alors $I \circ v$ est la restriction de l'injection canonique de X en $\mathcal{F}(X)^{**}$. Soit F est une fonction Lipschitzienne d'un ensemble normé X d'un espace normé E . Alors

$$F = F_0 + F(e).$$

Où $F_0 \in \text{Lip}(X, E)$. Ainis, chaque $F \in \text{Lip}(X, E)$ peut être étendue à une affine continue $\tilde{F}_0 + F(e)$ de $\mathcal{F}(X)$ à E . Nous pouvons voir aussi que $\text{Lip}_0(X, E)$ est un sous espaces de $\text{Lip}(X, E)$. ■

Proposition 2.1.4 *Soit X_0 un sous espace normé d'un espace normé X . Alors le point $y \in X$ appartient à $\mathcal{F}(X)$ si et seulement si, $y \in \bar{X}_0$, où $\bar{X}_0$ est la fermeture de $X_0 \subset X$.*

Preuve. Si $y \in \bar{X}_0$, alors évidemment $y \in \mathcal{F}(X_0)$. Supposons que $y \in X$, $y \in \mathcal{F}(X_0)$ et $y \notin X_0$. Ainsi $d(y, X_0) = h > 0$. Soit $z_n \in \text{span } X_0$ et $z_n \rightarrow y$. Ensuite, pour chaque $f \in \text{Lip}_0(X)$, $f(z_n) \rightarrow f(y)$. On définit $f_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f_0(y) = h$, pour tout $x \in X$ tel que $d(x, y) < h$ on pose $f_0(x) = h - d(x, y)$ et si $d(x, y) \geq h$, on met $f_0(x) = 0$. L'application f_0 est Lipschitzienne qui nulle sur X_0 . De puis $e \in X_0$, $f_0 \in \text{Lip}_0(X)$. Mais $f_0(z_n) = 0$, alors que $f_0(y) = h > 0$. Contradiction. ■

Par Proposition 2.1.4 L'espace Lipschitz libre d'espace normé coïncide avec l'espace Lipschitz libre de son complété. Un espace norme X est faiblement fermé dans $\mathcal{F}(X)$, si et seulement s'il est complet. Alors la topologie en norme de $\mathcal{F}(X)$ coïncide avec la topologie faible sur $X \subset \mathcal{F}(X)$.

Corollaire 2.1.2 *Si X_1 et X_2 sont des sous ensemble normé fermés d'un ensemble normé complet Y tel que $X_1 \cap X_2 = \{e\}$, alors $\mathcal{F}(X_1 \cup X_2)$ est isomorphe à $\mathcal{F}(X_1) \oplus \mathcal{F}(X_2)$.*

Preuve. la projection de $\mathcal{F}(X_1 \cup X_2)$ pour $\mathcal{F}(X_1)$ noyau a $\mathcal{F}(X_2)$ par Proposition(2.1.4). Après [8] pour $x \in X$ par $v(x) \in \mathcal{F}(X_1)$ par x et par $\text{span } X$ on veut dir $\text{span } v(x)$ dans $\mathcal{F}(X)$. En utilisant le Corollaire 2.1.2 et la proposition suivante, il est possible de construire quelques exemples d'espces Lipschitz libre. ■

Proposition 2.1.5 [24] *Si (X, d) est un espace métrique discret, alors $\mathcal{F}(X)$ est isométrique isomorphe à $l_1(X)$. L'espace Lipschitz libre $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est un isométriquement isomorphe de $L_1(\mathbb{R})$.*

Preuve. la première partir de la proposition a été prouvée dans [23, p. 198]. Supposons que $X = \mathbb{R}$ avec la norme habituelle. Soit $z \in \text{span } \mathbb{R} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Alors $z = \sum_{k=1}^n a_k \chi_k$ pour certains nombres $a_1, \dots, a_n$, $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on suppose que $0 < x_1 < \dots < x_n$. Le vecteur z peut être représenté par

$$z = \sum_{k=1}^n b_k (x_k - x_{k-1})$$

pour certains nombres $b_1, \dots, b_n$, où $x_0 = 0$. Pour un vecteur z nous définissons la fonction de par $\sum_{k=1}^n b_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]}$ associe sur z .

$$\left\| \sum_{k=1}^n b_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]} \right\|_{L_1} = \sum_{k=1}^n |b_k| |x_k - x_{k-1}| = \sum_{k=1}^n \|b_k (x_k - x_{k-1})\| \geq \|z\|. \quad (2.1.1)$$

Nous allons montrer que la norme L_1 de cette fonction est exactement égale à la norme de z dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

considérons la fonction sur $\mathbb{R}$. défini par

$$g(x) = \sum (\text{sign } b_k) \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(x),$$

où $\chi_{[x_{k-1}, x_k]}$ est un fonction caractéristique de l'intervalle $\chi_{[x_{k-1}, x_k]}(x)$.

$$\text{sign } b_k = \begin{cases} 1 & \text{si } b_k \geq 0 \\ -1 & \text{si } b_k < 0. \end{cases}$$

Pour

$$f_z(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

Il est clair que $f_z \in Lip_0(\mathbb{R})$ et $L_{f_z} = 1$. Donc $\tilde{f}_z$ est un fonction linéaire continue sur $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ avec $\|\tilde{f}_z\| = 1$ et

$$\begin{aligned} \tilde{f}_z(z) &= \tilde{f}_z\left(\sum_{k=1}^n b_k (x_k - x_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^n b_k \tilde{f}_z(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n b_k (\text{sign } b_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(t) dt = \sum_{k=1}^n |b_k| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n |b_k| \|x_k - x_{k-1}\| \\ &= \int_0^{x_n} \left| \sum_{k=1}^n b_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(t) \right| dt = \left\| \sum_{k=1}^n b_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]} \right\|_{L_1} \leq \|z\| \|\tilde{f}_z\| = \|z\|. \end{aligned}$$

Combinez cette inégalité avec 2.1.1 nous avons que

$$\left\| \sum_{k=1}^n b_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]} \right\|_{L_1} = \|z\|.$$

Ainsi, l'étendue $\mathbb{R}$ est isométrique isomorphe an sou espace dense de fonction d'étape dans $L_1(\mathbb{R})$ et ainsi $\mathcal{F}(X) = L_1$. ■

2.2 La rétraction Lipschitzienne et la structure des espaces Lipschitz libres

2.2.1 Introduction

La notion de “Lipschitz retraction” dans les espaces métriques est comme la projection lineaire dans les espaces de Banach.

2.2.2 La rétraction Lipschitzienne dans les espaces de Banach

Définition 2.2.1 Soient X un espace métrique et X_0 un sous ensemble de X . Une application (resp. Uniforme et continue) Lipschitzienne $r : X \rightarrow X_0$ est dite “Lipschitzienne rétraction” (ou rétraction uniforme) si $r|_{X_0} = Id_{X_0}$. Dans ce cas, on dira X_0 l’espace rétract de X . Une métrique est appelé un Lipschitz rétract absolu (resp. Uniforme) s’il est un Lipschitz rétract pour chaque l’espace métrique de contenant comme sous ensemble fermé. Un Lipschitz rétraction est un λ -Lipschitz rétraction si $L_r = \lambda$.

Notez que, si X_0 est un rétract (uniform) de X alors X_0 est fermé dans X .

Proposition 2.2.1 Soit Y un espace métrique Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. L’espace Y est un espace rétract absolu.
2. Pour tout métrique X , pour tout $E \subset X$ et toute fonction Lipschitzienne $f : E \rightarrow Y$ s’étend à $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ Lipschitzienne.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i_X \uparrow & \searrow \tilde{f} & \\ E & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

3. Pour tout Z espace métrique tel que $Y \subset Z$, et F espace métrique, alors toute fonction Lipschitzienne $f : Y \rightarrow F$ se prolonge à une fonction Lipschitzienne $\tilde{f} : Z \rightarrow F$

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ i_X \uparrow & \searrow \tilde{f} & \\ Y & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

Proposition 2.2.2 *Si X_0 un sous ensemble normé dans un ensemble normé X ($X_0 \subset X$) est un λ -Lipschitz rétract de X , alors $\mathcal{F}(X_0)$ est λ -complémentaire dans $\mathcal{F}(X)$.*

Preuve. Soit $r : X \rightarrow X_0$ est un λ -Lipschitz rétract. Alors $r(e) = e$, et $v \circ r : X \rightarrow \mathcal{F}(X_0)$. Ainsi $\widetilde{v \circ r} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X_0)$ est un opérateur linéaire et $\|v \circ r\| = L_{v \circ r} = L_r = \lambda$. Soit $z \in \text{span } X_0$, $z = \sum_{k=1}^n a_k x_k$, $x_k \in X_0$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\widetilde{v \circ r}(z) = \sum_{k=1}^n a_k v \circ r(x_k) = \sum_{k=1}^n a_k x_k.$$

Le fait $\widetilde{v \circ r}$ est l'identité sur un sous espace dense de $\mathcal{F}(X_0)$, c'est l'identité sur $\mathcal{F}(X_0)$. Ainsi $\widetilde{v \circ r}$ est un projection et $\mathcal{F}(X_0)$ est λ -complémentaire dans $\mathcal{F}(X)$. ■

Lemme 2.2.1 *Soit X un espace de Banach. Alors X est un 1-Lipschitz rétract de $\mathcal{F}(X)$.*

Preuve. Pour chaque $z \in \text{span } X \subset \mathcal{F}(X)$,

$$z = \sum_{k=1}^n a_k x_k, \quad x_k \in X,$$

on met

$$h_0(z) = \sum_{k=1}^n a_k x_k.$$

Par définition, h_0 est un opérateur linéaire de $\text{span } X$ dans X . Puisque toute forme linéaire continue sur X est une forme 1-Lipschitzienne, on a

$$\|h_0(z)\|_X = \sup_{\varphi \in X', \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(h_0(z))| \leq \sup_{\psi \in \text{Lip}_0(X), L_\psi \leq 1} |\psi(h_0(z))| = \|z\|_{B_X}$$

Et ainsi h_0 est une extension d'un opérateur linéaire continue h , on définit sur $\mathcal{F}(X)$ avec $\|h\| = \|h_0\|$. L'image de h coïncide avec X , car X est un espace complet, et h est l'identité sur $v(x)$. Donc $r = v \circ h$ est une 1-Lipschitz rétract de $\mathcal{F}(X)$ dans X considéré comme un sous ensemble de $\mathcal{F}(X)$. ■

Théorème 2.2.1 *Soient X, X_0 deux espaces de Banach avec $X_0 \subset X$. Alors X_0 est un λ -Lipschitz rétract de X si, et seulement si, $\mathcal{F}(X_0)$ est λ -complémentaire dans $\mathcal{F}(X)$.*

Preuve. Soit $\mathcal{F}(X_0)$ est λ -complémentaire dans $\mathcal{F}(X)$ et soit $\pi : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X_0)$ est une λ -projection. Par Lemme(2.2.1) il y a un 1-Lipschitz rétract de $\mathcal{F}(X_0)$ dans X_0 . Ainsi $r \circ \pi$ est une λ -rétraction de $\mathcal{F}(X)$ sur X_0 . Alors $X \supset X_0$ la restriction de $r \circ \pi$ sur $v(X)$ est la λ -rétraction de X sur X_0 . Pour l'inverse, on suit La Proposition(2.2.2). ■

Corollaire 2.2.1 *Supposons que l'espace de Banach X est λ -Lipschitz rétract absolu. Alors pour chaque espace normé $Y \supset X$, $\mathcal{F}(X)$ est λ -complémentaire dans $\mathcal{F}(Y)$.*

Corollaire 2.2.2 *Pour chaque espace de Banach X , $\mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$ contient une copie de $\mathcal{F}(X)$ 1-complémentaire.*

Preuve. Par le Lemme 2.2.1 X est 1-Lipschitz rétract dans $\mathcal{F}(X)$. Donc, par Théorème 2.2.1 $\mathcal{F}(X)$ est 1-complémentaire dans $\mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$. On dit qu'un espace métrique I est une métrique ligne si elle est un isométrique image de la ligne réelle $\mathbb{R}$. D'après [2, p.13], $\mathbb{R}$ est un 1-Lipschitz rétract absolu. Donc, si un espace normé X contient une ligne métrique I comme un sous ensemble normé, alors par Théorème 2.2.1 et Proposition (2.1.5), $\mathcal{F}(X)$ contient une copie de $L_1(\mathbb{R})$ 1-complémentaire. ■

Théorème 2.2.2 *Soient X_1 et X_2 deux Lipschitz rétracts absolus avec un point distingué commun e . Alors $X_1 \cup X_2$ est un Lipschitz rétract absolu.*

Preuve. Supposons que $X_1 \cup X_2$ est isométrie injective de l'espace métrique Y et la métrique sur $X_1 \cup X_2$ définie par $d(x_1, x_2) = d(x_1, e) + d(x_2, e)$, $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Alors Y est une ensemble normé avec le point distingue e , où $\{e\} = X_1 \cap X_2$.

Par Théorème 2.2.1, $\mathcal{F}(Y) = \mathcal{F}(X_1) \oplus E_1 = \mathcal{F}(X_2) \oplus E_2$ pour certains espaces de Banach E_1 et E_2 et il y a des projections linéaires continues $\pi_k : \mathcal{F}(Y) \rightarrow E_k$ $k = 1, 2$. La projection π_1 est l'identité sur $\mathcal{F}(X_2)$ par Corollaire 2.1.2, donc $\pi_2 \circ \pi_1$ est une projection sur l'espace de Banach E tels que $\mathcal{F}(Y) = \mathcal{F}(X_1) \oplus \mathcal{F}(X_2) \oplus E$.

Soit $\pi : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X_1) \oplus \mathcal{F}(X_2) = \mathcal{F}(X_1 \cup X_2)$ une projection et $r_k : \mathcal{F}(X_k) \rightarrow X_k$ une rétraction, $k = 1, 2$. Nous allons définir une application $r : \mathcal{F}(X_1) \oplus \mathcal{F}(X_2) \rightarrow X_1 \cup X_2$

par

$$r(z_1 + z_2) = \begin{cases} e & \text{si } \alpha(z_1) = \alpha(z_2) \\ r_1(z_1) \left(\frac{\alpha(z_1) - \alpha(z_2)}{\alpha(z_1) + \alpha(z_2)} \right) & \text{si } \alpha(z_1) > \alpha(z_2) \\ r_2(z_2) \left(\frac{\alpha(z_2) - \alpha(z_1)}{\alpha(z_1) + \alpha(z_2)} \right) & \text{si } \alpha(z_2) > \alpha(z_1), \end{cases}$$

où $z_k \in \mathcal{F}(X_k)$ et α est la norme sur Y . Pour chaque $u, v \in \mathcal{F}(X_1) \oplus \mathcal{F}(X_2)$, $u = z_1(u) + z_2(u)$, $v = z_1(v) + z_2(v)$, $z_k(u), z_k(v) \in X_k$. Alors $u - v = (z_1(u) - z_1(v)) + (z_2(u) - z_2(v))$. Si $\alpha(z_1(u) - z_1(v)) \geq \alpha(z_2(u) - z_2(v))$, alors $r(u - v) = (z_1(u) - z_1(v)) \cdot \gamma$, où $0 < \gamma \leq 1$. Donc

$$\begin{aligned} \|r(u - v)\| &= \|z_1(u) - z_1(v)\| \cdot \gamma \leq \|z_1(u) - z_1(v)\| \leq L_{r_1} \|z_1(u) - z_1(v)\| \\ &\leq L_{r_1} \|z_1(u) - z_1(v) + z_2(u) - z_2(v)\| = L_{r_1} \|u - v\|. \end{aligned}$$

De même façon, en cas $\alpha(z_2(u) - z_2(v)) > \alpha(z_1(u) - z_1(v))$. Ainsi r est une application Lipschitzienne sur $X_1 \cup X_2$ et il est l'identité sur $X_1 \cup X_2$. Donc il est une rétraction, et $r \circ \pi \circ v$ est une rétraction de Y dans $X_1 \cup X_2$. ■

Corollaire 2.2.3 Soient $X_1, \dots, X_n$ des Lipschitz rétracts absolus tels que, pour toute $m > 1$, $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$, $\cap_{i=1}^m X_{k_i} = \{e\}$, alors $\cup_{k=1}^n X_k$ est un Lipschitz rétract absolu.

Ce résultat peut être améliorée pour 1-Lipschitz rétracte absolu en utilisant la définition d'un espace métrique convexe.

Proposition 2.2.3 Une espace métrique X est un 1-Lipschitz rétract absolu si, et seulement si, elle est métriquement convexe et possède la propriété d'intersection binaire.

Preuve. Pour la preuve voir [2, p. 13]. ■

Théorème 2.2.3 Soient $X_1, \dots, X_n$ un 1-Lipschitz rétract absolu et $e \in X_1 \cap \dots \cap X_n$ tels que, pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $X_i \cap X_j = \{e\}$, alors $\cup_{k=1}^n X_k$ avec métrique

$$d(x, y) = \begin{cases} d_k(x, y) & \text{si } x \in X_k, y \in X_k \\ d_i(x, e) + d_j(e, y) & \text{si } x \in X_i, y \in X_j, i \neq j \end{cases}$$

est un 1-Lipschitz retracts absolu.

Preuve. Puisque chaque X_k a la propriété d'intersection binaire, leur union finie l'a. Aussi, il est facile de vérifier que $(\cup_{k=1}^n X_k, d)$ est un espace métrique convexe. Ainsi,

par Proposition 2.2.3 $\cup_{k=1}^n X_k$ est un 1-Lipschitz rétract absolu. Pour des espaces normés $X_1, \dots, X_n$ avec le point unique e dans leur arbitraires intersections (comme dans le Théorème 2.2.3) notons $\prod_{k=1}^n X_k = X_1 \times \dots \times X_n$ leur produit cartésienne avec la distance

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k).$$

En utilisant les mêmes arguments que dans le Théorème 2.2.3, il est possible de prouver que, si $X_1, \dots, X_n$ sont 1-Lipschitz rétracte absolus, alors pour chaque $m \leq n$,

$$\bigcup_{i_1 < \dots < i_m} \prod_{k=1}^m X_{i_k} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n X_k \mid x_i = e \text{ pour au moins } n - m \text{ de indices } i\}$$

avec la métrique induite à partir de $\prod_{k=1}^n X_k$ est un 1-Lipschitz rétract absolu.

Soit $x \in \text{span } X \subset \mathcal{F}(X)$. Le support de x , $\text{supp } x$ de l'ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tels que

$$x = \sum_k a_k x_k$$

pour certains $a \in \mathbb{R}$. ■

Pour la preuve du lemme suivant voir [7, 8] [22].

Lemme 2.2.2 Soient $x \in \text{span } X$ pour un ensemble normé X avec la normé α_k . Alors pour certaines collections finies $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ et $u_i, v_i, z_j \in \text{supp } x$, on a

$$x = \sum_i \lambda_i (u_i - v_i) + \sum_j \mu_j z_j \quad (2.2.1)$$

et

$$\|x\| = \sum_i |\lambda_i| d_X(u_i, v_i) + \sum_j |\mu_j| \alpha_X(z_j). \quad (2.2.2)$$

Pour des espaces de Banach $E_1, \dots, E_n$, $\sum_{k=1}^n \oplus_p E_k$ désigne leur somme directe, induit avec l_p -somme direct norme.

Théorème 2.2.4 Soient $X_1, \dots, X_n$ sont des 1-Lipschitz rétracts absolus et $e \in X_1 \cap \dots \cap X_n$ tels que pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $X_i \cap X_j = \{e\}$. Alors l'espace $\mathcal{F}(\Pi_{k=1}^n X_k)$ est isomorphe de $\sum_{k=1}^n \oplus_1 \mathcal{F}(X_k)$.

Preuve. Supposons que le théorème est prouvé pour chaque $m < n$. Soient r une application de $\Pi_{k=1}^n X_k$ dans $\Pi_{k=1}^{n-1} X_k \times \{e\}$, $r : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, e)$. C' est un 1-Lipschitz rétract et il peut être étendu par la Proposition 2.2.2 à une 1-projection π_r de $\mathcal{F}(\Pi_{k=1}^n X_k)$ dans $\mathcal{F}(\Pi_{k=1}^{n-1} X_k \times \{e\})$.

Soient $x \in \text{span } \Pi_{k=1}^n X_k$ et par Lemme 2.2.2 on écrit $x = \sum_i \lambda_i (u_i - v_i) + \sum_j \mu_j z_j$ satisfaire 2.2.2 et avec $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ et $u_i, v_i, z_j \in \text{supp } x$. Alors

$$x = \sum_i \lambda_i (v(u_{i1}, \dots, u_{in}) - v(v_{i1}, \dots, v_{in})) + \sum_j \mu_j v(z_{j1}, \dots, z_{jn})$$

est la décomposition 2.2.1 de Lemme 2.2.2, où u_{ik} (resp. v_{ik}, z_{jk}) est le k -th "coordonat" de u_i (resp. v_i, z_j) dans $\prod_{k=1}^n X_k$. ici v est natural incorporation de $\prod_{k=1}^n X_k$ sur $\mathcal{F}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right)$.

Donc

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sum_i |\lambda_i| d((u_{i1}, \dots, u_{in}), (v_{i1}, \dots, v_{in})) + \sum_j |\mu_j| \alpha(z_{j1}, \dots, z_{jn}) \\ &= \sum_i |\lambda_i| \sum_{k=1}^n d(u_{ik}, v_{ik}) + \sum_j |\mu_j| \sum_{k=1}^n \alpha(z_{jk}) \\ &= \sum_i |\lambda_i| \sum_{k=1}^n \|u_{ik} - v_{ik}\| + \sum_j |\mu_j| \sum_{k=1}^n \|z_{jk}\|. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Depuis

$$\pi_r(x) = \sum_i \lambda_i (v(u_{i1}, \dots, u_{in-1}, e) - v(v_{i1}, \dots, v_{in-1}, e)) + \sum_j \mu_j v(z_{j1}, \dots, z_{jn-1}, e),$$

alors

$$\begin{aligned} \pi_r(x) &\leq \sum_i |\lambda_i| \|v(u_{i1}, \dots, u_{in-1}, e) - v(v_{i1}, \dots, v_{in-1}, e)\| + \\ &\quad \sum_j |\mu_j| \|v(z_{j1}, \dots, z_{jn-1}, e)\| \\ &= \sum_i |\lambda_i| \sum_{k=1}^{n-1} d(u_{ik}, v_{ik}) + \sum_j |\mu_j| \sum_{k=1}^{n-1} \alpha(z_{jk}) \\ &= \sum_i |\lambda_i| \sum_{k=1}^{n-1} \|u_{ik} - v_{ik}\| + \sum_j |\mu_j| \sum_{k=1}^{n-1} \|z_{jk}\|. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

D'autre part,

$$x - \pi_r(x) = \sum_i \lambda_i (v(e, \dots, e, u_{in}) - v(e, \dots, e, v_{in})) + \sum_j \mu_j v(e, \dots, e, z_{jn})$$

et

$$\|x - \pi_r(x)\| \leq \sum_i |\lambda_i| \|u_{in} - v_{in}\| + \sum_j |\mu_j| \|z_{jn}\|. \quad (2.2.5)$$

Combiner 2.2.5 sur 2.2.4 et 2.2.3 nous avons que

$$\|\pi_r(x)\| = \sum_i |\lambda_i| \sum_{k=1}^{n-1} \|u_{ik} - v_{ik}\| + \sum_j |\mu_j| \sum_{k=1}^{n-1} \|z_{jk}\|.$$

Donc si $x = y + z$, $y \in \mathcal{F}(\Pi_{k=1}^{n-1} X_k \times e)$ et $z \in \mathcal{F}\left(\underbrace{e \times \dots \times e}_{n-1} \times X_n\right)$, alors $\|x\| = \|y\| + \|z\|$. Donc la preuve découle de l'hypothèse d'induction. ■

Corollaire 2.2.4 *L'espace Lipschitz libre $\mathcal{F}(X)$ sur tout espace de Banach de dimension finie X est isomorphe à $L_1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(l_1^n)$ est isométriquement isomorphe à $L_1(\mathbb{R})$.*

Preuve. En mettant dans le Théorème 2.2.4 $X_k = \mathbb{R}$ pour $k = 1, \dots, n$ on obtient que $\mathcal{F}(l_1^n)$ est isomorphe de l_1 -somme de $L_1(\mathbb{R})$ (voir la Proposition 2.1.5) c'est isomorphe de $L_1(\mathbb{R})$. Puisque les espaces de Banach de n -dimensionnel X et Y sont isomorphes, les espaces $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{F}(Y)$ sont isomorphes. ■

Corollaire 2.2.5 *$\mathcal{F}(l_1)$ est isométriquement isomorphe de $L_1(\mathbb{R})$.*

Preuve. Soit $\{e_k\}$ est une base classique dans l_1 et $\mathbb{R}_{e_k}$ l'espace 1-dimonsionnel, engendré par e_k . Soit $l_{1,0}$ un sous espace de l_1 de composé des toutes les combinaisons linéaires d'éléments de base $\{e_k\}$. Par Proposition 2.1.4, $\mathcal{F}(l_{1,0}) = \mathcal{F}(l_1)$ donc $\text{span } l_{1,0}$ est dense en $\mathcal{F}(l_1)$. Par Théorème 2.2.4, l'espace $\text{span } l_{1,0}$ est isométrique au sous espace dense dans $\sum_{k=1}^{\infty} \oplus_1 L_1(\mathbb{R}_{e_k})$. D'ou $\mathcal{F}(l_1)$ est isométriquement isomorphe de $\sum_{k=1}^{\infty} \oplus_1 L_1(\mathbb{R}_{e_k})$, qui est isomorphe de $L_1(\mathbb{R})$ voir [16, p. 54]. ■

Proposition 2.2.4 *Si un espace métrique X est Lipschitz équivalent de Y , alors l'espace de Banach $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{F}(Y)$ sont isomorphes.*

Preuve. Soient $e : X \rightarrow Y$ une application Lipschitz équivalent, par Théorème 2.1.2 l'application $v \circ e$ s'étend au opérateur linéaire continu $T = \widetilde{v \circ e} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$. Montrons que T est une bijection. l'application $f \rightarrow f \circ e$, $f \in \text{Lip}_0(Y)$ est une bijection entre $\text{Lip}_0(Y)$ et $\text{Lip}_0(X)$. Mais par Théorème 2.1.2, et $\text{Lip}_0(X)$ coïncident, jusqu'à l'isomorphisme isométrique, avec $\mathcal{F}(Y)^*$ et $\mathcal{F}(X)^*$ respectivement et l'opérateur $f \rightarrow f \circ e$ coïncides sur $T^* : \mathcal{F}(Y)^* \rightarrow \mathcal{F}(X)^*$. De puis il est une bijection et donc $\mathcal{F}(X)$ est isomorphe de $\mathcal{F}(Y)$. ■

Par le Corollaire 2.2.5 nous pouvons voir que l'isomorphisme des espaces de Lipschitz libres n'implique pas Lipschitz équivalence de des ensembles normes correspondants. Dans [20] Pestov a demandé si pour chaque ensemble normé X . $\mathcal{F}(X)$ est isomorphe de $L_1(X, \mu)$ pour certains mesure μ sur X . Ensuit, M. Dubei et all [5] ont montré qu'il n'est pas.

Note que si X est séparable, $\mathcal{F}(X)$ est séparable aussi.

Proposition 2.2.5 *Pour X est un espace de Banach, l'espace X^* est 1-complémentaire dans $\mathcal{F}(X)^*$ (i.e., il y a une projection avec sa normé égale 1 de $\mathcal{F}(X)^*$ dans X^*).*

Preuve. Par [2, p.173] X^* est un sous espace 1-complémentaire de l'espace de Banach $\text{Lip}(X)$. Depuis $\mathcal{F}(X)^* = \text{Lip}_0(X)$ est un sous espace 1-complémentaire de $\text{Lip}(X)$ et contient X^* , X^* est 1-complémentaire dans $\mathcal{F}(X)^*$. ■

2.2.3 $\mathcal{L}_p$ -espace

Définition 2.2.2 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $\lambda > 1$. Dans l'espace de Banach X est dit à un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -espace si tout sous espace E de X est contenue dans un sous espace des dimensions finis F de X pour il existe un isomorphisme $\nu : F \rightarrow l_p^{\dim F}$ avec $\|\nu\| \cdot \|\nu^{-1}\| < \lambda$. On dit que X est un $\mathcal{L}_p$ -espace si c'est un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -espace pour certains $\lambda > 1$.*

Théorème 2.2.5 [17, p.308] *Soit $1 < p < \infty$ et X un $\mathcal{L}_p$ -espace. Puis il existe une mesure μ et un sous espace complét Y de $L_p(\mu)$ qui est isomorphe à X .*

Corollaire 2.2.6 *L'espace $\mathcal{F}(l_2)$ n'est pas $\mathcal{L}_1$ -espace.*

Preuve. Par Proposition 2.2.5 $\mathcal{F}(l_2)^*$ n'est pas isomorphe de l_∞ comme il est connu l_∞ ne contient pas une copie complète de l_2 . Puisque $\mathcal{F}(l_2)$ est séparable, dans la Théorème 2.2.5 il n'est pas isomorphe à un $\mathcal{L}_1$ -espace. ■

La prochaine proposition montre que $\mathcal{F}(X)$ est similaire, dans certains sens de l_1 .

Proposition 2.2.6 *Soit X un espace de Banach séparable. Alors chaque espace de Banach séparable E est isomorphe à un quotient de $\mathcal{F}(X)$.*

Preuve. D'après de Théorème 1.2.2 il existe une application Lipschitzienne surjective F de X dans E . sans perte de généralité on peut supposons que $F(0) = 0$. Soit $\tilde{F}$ un opérateur linéaire correspondant de $\mathcal{F}(X)$ sur E . Alors E est isomorphe à $\mathcal{F}(X) / \ker \tilde{F}$. ■

Chapitre 3

Les applications 2-Lipschitziennes sur les espaces Lipschitz libres

3.1 Les applications 2-Lipschitziennes

Définition 3.1.1 Soient (X, e_x) , (Y, e_y) deux espaces métriques pointés et les normes $\alpha(x) = d(e, x)$ et $\alpha(y) = d(e, y)$ respectivement. Considérons une application $g(x, y)$ qui est définie sur le produit cartésien $X \times Y$ à valeurs dans un espace normé E . Soit $A_y(x)$ une application de X dans E tels que $A_y(x) = g(x, y)$ pour chaque $y \in Y$ est fixé. De même, $A_x(y) = g(x, y)$ est une application de Y à E pour chaque $x \in X$ est fixé.

Une application $g : X \times Y \rightarrow E$ est appelée 2-Lipschitzienne si $A_x(y)$ est Lipschitz pour chaque $x \in X$ est fixé et $A_y(x)$ est Lipschitz pour chaque $y \in Y$ est fixé.

Pour une application 2-Lipschitzienne g notons G l'opérateur $x \mapsto A_x$.

Théorème 3.1.1 Soient g une application 2-Lipschitzienne et $A_x(y) \in \text{Lip}_0(Y, E)$ pour toute $x \in X$, $A_y(x) \in \text{Lip}_0(X, E)$ pour toute $y \in Y$ et $G : x \mapsto A_x$ appartient à la classe $\text{Lip}_0(X, \text{Lip}_0(Y, E))$. Alors il existe une application linéaire continue $D : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \rightarrow E$ tels que

$$D(x, y) = g(x, y)$$

pour tous $x \in X$, $y \in Y$ et $\|D\| = L_G$.

Preuve. Soit $\tilde{G}$ une extension de G à l'opérateur linéaire de $\mathcal{F}(X)$ à $Lip_0(Y, E)$ avec $\|\tilde{G}\| = L_G$. Si $z = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in \mathcal{F}(X)$, alors

$$\tilde{G}(z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k A_{x_k},$$

où $A_{x_k} \in Lip_0(Y, E)$. De plus, chaque A_{x_k} peut être étendue à un opérateur linéaire continue $\tilde{A}_{x_k}$ de $\mathcal{F}(Y)$ à E avec

$$\|\tilde{A}_{x_k}\| = L_{A_{x_k}}.$$

Nous considérons l'application $\tilde{\tilde{G}}(z) : z \rightarrow \tilde{A}_z$, où

$$\tilde{A}_z = \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{A}_{x_k}.$$

Cette application de l'espace $\text{span } \nu(X)$ des combinaisons linéaires finies

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k,$$

qui est dense dans $\mathcal{F}(X)$ à $\mathcal{L}(\mathcal{F}(Y), E)$.

Les applications $\tilde{\tilde{G}}$ est la composition de l'opérateur linéaire continue $\tilde{G} : z \rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k A_{x_k}$ et l'opérateur linéaire isométrique $\nu : A_{x_k} \rightarrow \tilde{A}_x$ et

$$\|\tilde{\tilde{G}}\| = \|\tilde{G}\|.$$

Par conséquent, $\tilde{\tilde{G}}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{F}(X)$ dans l'espace des opérateurs linéaires continus $\mathcal{L}(\mathcal{F}(Y), E)$. Il est connu de la théorie des applications bilinéaires, que $D(z, w) = \tilde{A}_z(w)$ est une application bilinéaire continue et

$$\begin{aligned} \|D\| &= \sup_{\|z\| \leq 1, \|w\| \leq 1} \|D(z, w)\| = \sup_{\|z\| \leq 1, \|w\| \leq 1} \|\tilde{A}_z(w)\| = \sup_{\|z\| \leq 1} \|\tilde{\tilde{G}}(z)\| \\ &= \|\tilde{\tilde{G}}\| = L_G. \end{aligned}$$

■

Notons que l'inverse est vrai. Si D est une application bilinéaire continue sur $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y)$, alors

$$g(x, y) = D(x, y)$$

est une application 2-Lipschitzienne qui satisfait aussi la condition du Théorème 2.2.5.

Il est bien connu qu'il existe un opérateur linéaire continue Φ_g sur le produit tensoriel projectif $\mathcal{F}(X) \otimes_\pi \mathcal{F}(Y)$ tels que $\Phi_g = D(u, v)$ pour tout $u \in \mathcal{F}(X)$, $v \in \mathcal{F}(Y)$. D'où une application 2-Lipschitz $g(x, y)$ satisfaite à la condition du Théorème 2.2.5 si, et seulement, si $\Phi_g(x \otimes y) = g(x, y)$ pour certains opérateur linéaires continues Φ_g .

Alors, l'ensemble des fonctions 2-Lipschitziennes réelles de Lipschitz qui satisfaites la condition du Théorème 2.2.5 est identifié avec les espaces de toutes les formes bilinéaires continues $\mathcal{Bil}(\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y)) = (\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y))^*$. On note cet ensemble par $Lip_0^2(X \times Y)$.

3.2 L'extension linéaire simultanée

Par Corollaire 1.2.1 toutes les applications Lipschitziennes sont étendues d'un sous espace $X_0 \subset X$ d'un espace métrique X à une application Lipschitzienne sur X .

M. Dubei et al dans [5] ont considéré le problème de simultanée extension cela signifie qui l'existence d'un opérateur linéaire continue de $Lip_0(X)$.

Rappelons que le sous espace fermé X d'un espace de Banach Y est localement complété dans Y s'il y a une constante M telle que chaque fois que F est une sous espace de dimension finie de Y il existe une application (en fonction de sous espace spécifique avec des dimension finit) $T : F \rightarrow X$ donc que $\|T\| \leq M$ et $T(x) = x$ pour tous $x \in X$.

Les résultats suivants ont été prouvé dans [13] pour les formes linéaires et dans [3] pour bilinéaires.

Définition 3.2.1 (Sous espace localement complémenté) *On dit que le sous espace fermé E d'un espace quasi-Banach X est localement complémenté dans X s'il existe une constante λ telle que chaque fois que F est un sous espace de dimension finie de X et $\varepsilon > 0$ il existe un opérateur linéaire $T = T_F : F \rightarrow E$ tel que $\|T\| \leq \lambda$ et $\|T_f - f\| \leq \varepsilon \|f\|$ pour $f \in E \cap F$.*

Nous observons que le principe de la réflexivité locale pour les espaces de Banach (Lindenstra et Rosenthal de [18]) signifie que les espaces de Banach X est localement complémenté dans son bidual X^{**} ($\lambda = 1$).

Proposition 3.2.1 *Soit X un sous espace fermé d'un espace de Banach Y . Les affirmations suivantes sont équivalents*

1. X est localement complémenté dans Y .
2. X^{**} est complètement dans Y^{**} sous l'injection naturelle.
3. Il existe une extension linéaire continue $A : X^* \rightarrow Y^*$ tel que $A(\phi)(x) = \phi(x)$ pour tout $x \in X$ et $\phi \in X^*$.
4. Il existe une extension linéaire continue de l'espace $\mathcal{L}(X \times X)$ des formes bilinéaires continues sur X dans l'espace $\mathcal{L}(Y \times Y)$ des formes bilinéaires continues sur Y .

Proposition 3.2.2 *Soit X un sous espace fermé d'un espace de Banach Y . si $\mathcal{F}(X)$ est localement complémenté dans $\mathcal{F}(Y)$, alors X est localement complémenté en Y .*

Preuve. Par Proposition 3.2.1, $\mathcal{F}(X)^{**}$ est complémenté dans $\mathcal{F}(Y)^{**}$. Soit $\pi : \mathcal{F}(Y)^{**} \rightarrow \mathcal{F}(X)^{**}$ est la projection linéaire continue. Par 2.2.5, Y^* est complète dans $\mathcal{F}(Y)$. Notons que Y^* considère comme un sous espace de $\mathcal{F}(Y)^*$, est constitué des fonctions Lipschitziennes f sur Y tel que

$$f(\lambda \underline{x} + \mu \underline{y}) = f(\underline{\lambda x + \mu y}) = \lambda f(x) + \mu f(y). \quad (3.2.1)$$

Ainsi Y^{**} est complété dans $\mathcal{F}(Y)^{**}$ et consiste des formes linéaires continues, définies sur les fonctions Lipschitziennes données par 3.2.1. La restriction de π sur Y^{**} définie de Y^{**} dans l'espaces des formes linéaires continues, définies sur le sous espace avec 3.2.1 qui appartient à $\mathcal{F}(X)$. Mais il coïncide avec $X^* \subset \mathcal{F}(X^*)$. Donc $\pi(Y^{**}) = X^{**}$. Depuis π est la projection leurs restrictions sur Y^{**} est la projection trop. Si X^{**} est complémenté dans Y^{**} et X est localement complémenté dans Y . ■

Pour chaque entier positif n notons $\mathcal{F}^n(X)$ l'espace $\underbrace{\mathcal{F}(\dots(\mathcal{F}(X) \dots))}_n$.

Corollaire 3.2.1 *Si $\mathcal{F}^n(X)$ est localement complémenté dans $\mathcal{F}^n(Y)$. Pour certains $n > 0$. Alors X est localement complémenté dans Y .*

Théorème 3.2.1 *Soit X est un sous espace fermé d'un espace de Banach Y .*

1. *Si X n'est pas localement complété dans Y , alors il n'existe pas des extensions linéaires continues de $\text{Lip}_0(X)$ dans $\text{Lip}_0(Y)$.*
2. *Si $\mathcal{F}^n(X)$ est localement complété dans $\mathcal{F}^n(Y)$ pour certains $n > 0$. Alors il existe une extension linéaire de $\text{Lip}_0(X)$ dans $\text{Lip}_0(Y)$ et de $\text{Lip}_0^2(X \times X)$ dans $\text{Lip}_0^2(Y \times Y)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe une extension linéaire de $\text{Lip}_0(X) = \mathcal{F}(X)^*$ dans $\text{Lip}_0(Y) = \mathcal{F}(Y)^*$. Ensuite par Proposition 3.2.1, $\mathcal{F}(X)$ est localement complété dans $\mathcal{F}(Y)$. et par Proposition 3.2.2, X est localement complété dans Y . Une contradiction. La deuxième assertion découle du Corollaire 3.2.1 et Proposition 3.2.1. ■

Exemple 3.2.1 *Soient $d(x, y)$ un espace métrique sur X . On pose $b(x, y) = b_b(x, y) = d(x, y) - d(e, x) - d(e, y)$. Alors $b(x, y)$ est un 2-Lipschitz, parceque.*

$$\begin{aligned} |b(x_1, y) - b(x_2, y)| &= |d(x_1, y) - d(x_2, y) - d(e, x_1) - d(e, y) + d(e, x_2) + d(e, y)| \\ &\leq |d(x_1, y) - d(x_2, y)| + |d(e, x_2) - d(e, x_1)| \leq 2d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Deplus, cette inégalité montrer que la application $G : x_0 \rightarrow b(x_0, y) \in \mathcal{L}(X)$ est dans $\text{Lip}_0(X, \text{Lip}_0(X))$.

Alors $b(x, y) \in \text{Lip}_0^2(X \times X)$. Donc par conséquent, nous avons que les applications 2-Lipschitziennes b_d associées à des métriques continues d sur un sous espace $X \subset Y$ est simultanément à une fonction continue de 2-Lipschitz sur Y si $\mathcal{F}^n(Y)$ pour certains $n > 0$.

De la Proposition 2.2.5 et Théorème 3.2.1 nous avons le Corollaire suivant.

Corollaire 3.2.2 *Si un espace de Banach X est un Lipschitz rétract absolu, alors pour tout espace de Banach Y qui contient comme sous espace fermé, il y a un opérateur d'extension linéaire continue de $\text{Lip}_0(X)$ à $\text{Lip}_0(Y)$ et de $\text{Lip}_0^2(X \times X)$ à $\text{Lip}_0^2(Y \times Y)$.*

Notons que selon [2, p. 32], l'espace de Banach des séquences nulles c_0 est un Lipschitz rétractation absolu. L'espace de Banach de toutes les fonctions à valeur réelle, dé limitées,

uniformément continues définies sur un espace métrique et doté de la sup – norme est une Lipschitz rétract absolu. De plus, tout espace P_λ réel est un λ -Lipschitz rétraction absolu. tout complexe P_λ -espace est un $4\lambda/\pi$ -Lipschit rétract absolu. Rappelons qu'un espace X de Banach est dit P_λ -espace s'il est λ -complémenté dans chaque espace de Banach Y le contenant comme un sous espace fermé.

Bibliographie

- [1] R.ARENS, J.ELLS, *On embedding uniform and topological spaces*. Pacific J. Math. 6 (1956) 397-403.
- [2] Y.BENYAMINI, J.LINDENSTRAUSS, *Geometric Nonlinear Function Analysis, I*, Vol, 48, AMS Colloquium Publications, Providence, Rhode Island, 2000.
- [3] F.CABELLO SANCHEZ, *Gracia, I. Villanueva*, Extension of multilinear operators on Banach spaces, Extracta Math. 15 (2000) 291-334.
- [4] J.CZIPSZER, L.GETHER, *Extension of functions satisfying a Lipschitz condition*, Acta Math. Acad, Sci, 6 (1955) 213-220.
- [5] M.DUBEI, E.D.TYMCHATYN, A.ZAGORODNYUK, *Free Banach spaces and extension of Lipschitz maps*, Topology 48 (2009) 203-212
- [6] Y.DUTRIEUX, V.FERENCZI, *The Lipschitz free Banach spaces of $C(K)$ -spaces*, Proc. Amer. Math.Soc. 2005.
- [7] J.FLOOD, *Free topological vector spaces*, Ph.D.Thesis, Australian National University, Candberre, 1975, 109p
- [8] J.FLOOD, *Free topological vector spaces*, Dissertation Math., CCXXI, PWN, Warszawa, 1984.
- [9] N. J. KALTON, G.GODEFROY, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. **159** (2003), 121-141.

- [10] J. A. JOHNSON, *Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970), 147-169.
- [11] J. A. JOHNSON, *Lipschitz function spaces for arbitrary metrics*, Bull. Amer. Math. Soc. 78, 5(1972), 702 – 705.
- [12] J. A. JOHNSON, *A note on Banach spaces of Lipschitz functions*, Pacific J. Math. 58, 2(1975), 475 – 482.
- [13] N.KALTON, *Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$ -spaces for $0 < p < 1$* . Math. Nachr. 115(1984) 71-97.
- [14] N. J. KALTON, *Spaces of Lipschitz and Hölder functions ant their applications*, Collect. Math. **55**(2)(2004), 171-217.
- [15] K. DE LEEUW, *Banach space of Lipschitz functions*, Studia Math. 21(1961), 55-66.
- [16] J.LINDESTRUSS, L.TZAFRIRI, *Classical Banach spaces I*, in: Sequence spaces, Springer-verlag, New York, 1977.
- [17] J.LINDENSTRAUSS, A.PELCHYNSKI, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ -spaces and application*, Studia Math. 29 (1968) 275-326.
- [18] J.LINDENSTRAUSS., H ROSENTHAHL, *The $\mathcal{L}_p$ -spaces Israel*, J. Math. 7(1969)325-349.
- [19] E.J.MCShANE, *Extension of rang of functions*, J. Math. 12 (1960) 674-685.
- [20] V.G.PESTOVE, *Free Banach spaces and representation of topological groups*, Funct. Anal. Appl, 20 (1986) 70-72.
- [21] V.G.PESTOV, *Douady's conjecture on Banach analytic spaces*, CR. Acad. sci Paris 319 (séries I) (1994) 1043-1048.
- [22] D.A.RAIKOV, *Free locally convex spaces for uniform spaces*, Mat. Sb.(NS) 63 (1964) 582-590.

- [23] Z.SEMADENI, *Banach Spaces of Continuous Functions*, I, Monografie Matematyczne, vol.55, Warsaw, 1971.
- [24] N.WEAVER, *Lipschitz Algebras*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1999.